A01. Уравнение за отношенията на два корена

Учебен пример от записките

Нека x_1 и x_2 са корените на следното уравнение. Съставете квадратно уравнение с корени $u_1 = x_1/x_2$ и $u_2 = x_2/x_1$ и изберете съответния отговор от записките.

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Пълното условие е редакционно оформено от стр. 2 и решението на стр. 3-4. Сред дадените варианти е $10u^2 - 29u + 10 = 0$. Не е установено, че този пример е от изпит на СУ.

Как да се сетим

Съставяне на уравнение по сбор и произведение; два начина - чрез явните корени и чрез Виет.

Подробно решение

Първо проверяваме дали деленето е допустимо. Корените са ненулеви, защото произведението им е 10. По Виет сборът им е 7.

$$x_1 + x_2 = 7, \qquad x_1x_2 = 10.$$

За новите корени търсим само сбора и произведението. В числителя на сбора използваме квадрата на сбора на старите корени.

$$u_1 + u_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{29}{10}.$$

$$u_1u_2 = 1, \qquad u^2 - \frac{29}{10}u + 1 = 0.$$

Умножаваме по 10. За числова проверка старото уравнение има корени 5 и 2, следователно новите са 5/2 и 2/5. Размяната на имената x_1 и x_2 не променя новото уравнение.

Отговор

$$10u^2 - 29u + 10 = 0, \qquad \{u_1, u_2\} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{2}{5}\right\}.$$

A02. Сума от кубовете на корените

СУ, 18.04.2026 г., задача 1

Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението, намерете $x_1^3 + x_2^3$.

$$x^2 - x - 3 = 0.$$

Как да се сетим

Симетричен израз чрез Виет; не е необходимо изрично намиране на корените.

Подробно решение

$$s = x_1 + x_2 = 1, \qquad q = x_1 x_2 = -3.$$

В куба на сбора участват точно двата търсени куба и допълнителен член, който можем да извадим.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = s^3 - 3qs.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 1 - 3(-3) \cdot 1 = 10.$$

Друг кратък начин: всеки корен удовлетворява $x_i^2 = x_i + 3$, оттук $x_i^3 = 4x_i + 3$. След събиране получаваме $4 \cdot 1 + 6 = 10$. Това е алтернативно обяснение, добавено към записките.

Отговор

$$x_1^3 + x_2^3 = 10.$$

A03. Сума на дроби, зависещи от три корена

СУ, 08.06.2024 г., задача 5

Корените на уравнението са x_1, x_2, x_3. Намерете A.

$$x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0.$$

$$A = \frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3}.$$

Официалната дата е 08.06.2024 г.; ръкописната дата на стр. 5 се разчита неоднозначно. Съвпадението е по цялото условие, не само по дата. Двата метода трябва да останат отделни подкарти.

Как да се сетим

Разлагане с известен корен 1 и Виет за оставащото квадратно уравнение. В записките е даден и втори начин с Виет за кубично уравнение.

Подробно решение

Преди да събираме дробите проверяваме знаменателите. Полиномът при x = 2 е 6, следователно никой от корените не е 2.

$$x^3 + x^2 - 4x + 2 = (x - 1)(x^2 + 2x - 2).$$

Можем да наречем $x_1 = 1$. Другите два корена удовлетворяват $x_2 + x_3 = -2$ и $x_2x_3 = -2$. Събираме последните две дроби.

$$A = 1 + \frac{4 - (x_2 + x_3)}{4 - 2(x_2 + x_3) + x_2x_3} = 1 + \frac{6}{6} = 2.$$

За втория начин означаваме $s_1 = x_1+x_2+x_3 = -1$, $s_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = -4$ и $s_3 = x_1x_2x_3 = -2$. При общ знаменател числителят е $12 - 4s_1 + s_2$, а знаменателят е $8 - 4s_1 + 2s_2 - s_3$.

$$A = \frac{12 - 4s_1 + s_2}{8 - 4s_1 + 2s_2 - s_3} = \frac{12}{6} = 2.$$

Отговор

$$A = 2.$$

A04. Квадратна функция по даден корен и връзка

СУ, 03.04.2022 г., задача 4

Числото 2 е корен на $ax^2 + bx + 8 = 0$ и $a + b = 3$. Определете къде квадратният тричлен $y(x) = ax^2 + bx + 8$ има минимум или максимум.

Как да се сетим

От дадения корен към линейна система; след това знак на a и връх на параболата.

Подробно решение

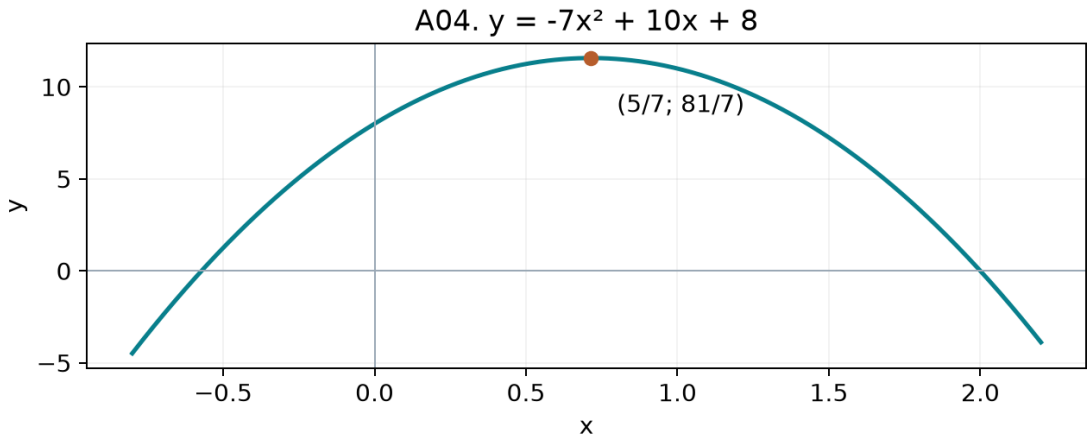
„2 е корен“ означава, че при заместване $x = 2$ получаваме нула. Пишем това като уравнение за a и b.

$$4a + 2b + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2a + b = -4.$$

Изваждаме $a + b = 3$ от $2a + b = -4$. Получаваме $a = -7$, след което $b = 10$.

$$y(x) = -7x^2 + 10x + 8 = -7\left(x - \tfrac{5}{7}\right)^2 + \tfrac{81}{7}.$$

Квадратът е неотрицателен, а коефициентът пред него е отрицателен. Най-голямата стойност се получава, когато квадратът стане нула. На цялата реална ос функцията няма най-малка стойност. В теста верният избор е максимум при 5/7.



Отговор

$$a = -7, \quad b = 10, \quad x_{\max} = \tfrac{5}{7}, \quad y_{\max} = \tfrac{81}{7}.$$

A05. Рационално уравнение със замяна x + 1/x

СУ, 18.04.2026 г., задача 11

Намерете всички реални корени.

$$6\left(x+\tfrac{1}{x}\right)-4\left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right)=-10.$$

Как да се сетим

Замяна t = x + 1/x и връщане към неизвестното с проверка за реални корени.

Подробно решение

Областта на допустимите стойности е $x \neq 0$. Повтарящите се изрази подсказват да означим $t = x + 1/x$.

$$x^2+\tfrac{1}{x^2}=t^2-2.$$

$$6t-4(t^2-2)=-10 \quad\Longleftrightarrow\quad 2t^2-3t-9=0.$$

$$(2t+3)(t-3)=0, \qquad t=3 \quad \text{or} \quad t=-\tfrac{3}{2}.$$

Връщаме се към x. За t = 3 получаваме $x^2 - 3x + 1 = 0$ и два реални ненулеви корена. За t = -3/2 получаваме $2x^2 + 3x + 2 = 0$, чиято дискриминанта е -7, затова няма реални корени.

Може да отсеем -3/2 и по-рано: за реално ненулево x числото x + 1/x принадлежи на $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. В записките тази граница не е изведена изрично.

Отговор

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{or} \quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

A06. Реципрочно уравнение от четвърта степен

СУ, 07.04.2024 г., задача 11

Решете уравнението в реални числа.

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Как да се сетим

Симетричните коефициенти подсказват делене на x^2 и замяна $t = x + 1/x$.

Подробно решение

Проверяваме $x = 0$: свободният член е 1, затова 0 не е корен. Следователно можем да разделим уравнението на x^2.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0.$$

$$t = x + \frac{1}{x}, \qquad t^2 - 6t + 5 = 0, \qquad (t-1)(t-5) = 0.$$

За $t = 1$ уравнението $x^2 - x + 1 = 0$ има $D = -3$ и няма реални корени. За $t = 5$ уравнението $x^2 - 5x + 1 = 0$ има $D = 21$ и два реални корена.

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1).$$

Последното разлагане служи и за независима проверка на пълнотата на отговора.

Отговор

$$x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

A07. Дробно уравнение с недопустим кандидат

СУ, 31.03.2013 г., задача 1

Решете уравнението.

$$\frac{2}{2-x}+\frac{6}{x^2-x-2}=1.$$

Как да се сетим

Допустими стойности, разлагане на знаменател, общ знаменател и отсяване на x = 2.

Подробно решение

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1),\qquad x\neq 2,\quad x\neq -1.$$

Преди да умножаваме по общ знаменател, записваме ограниченията. Превръщаме 2/(2 - x) в -2/(x - 2), за да са съгласувани множителите.

$$-2(x+1)+6=(x-2)(x+1).$$

$$x^2+x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+3)(x-2)=0.$$

Кандидатите са -3 и 2. Числото 2 е извън допустимите стойности. За x = -3 проверката дава 2/5 + 6/10 = 1. Следователно -3 е единственото решение.

Отговор

$$x=-3.$$

A08. Сбор на два модула

СУ, 12.04.2025 г., задача 12

Решете уравнението.

$$|2x - 5| + |4x + 2| = 6.$$

В записките на стр. 12 условието е |2x - 5| + |4x + 2| = 6, но в средния случай на стр. 13 свободният член +2 е сменен на -2. Така е получен неверният отговор x = 1/2. Официалното условие и официалният отговор потвърждават x = -1/2. Това е съществена поправка, която трябва да се покаже явно.

Как да се сетим

Разделяне на числовата ос по нулите на двата линейни израза.

Подробно решение

$$2x - 5 = 0 \implies x = \tfrac{5}{2}, \qquad 4x + 2 = 0 \implies x = -\tfrac{1}{2}.$$

Разделяме оста на x < -1/2, -1/2 ≤ x < 5/2 и x ≥ 5/2. Граничните точки са разпределени без застъпване.

$$x < -\tfrac{1}{2}: \quad (5 - 2x) + (-4x - 2) = 6 \quad \implies \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

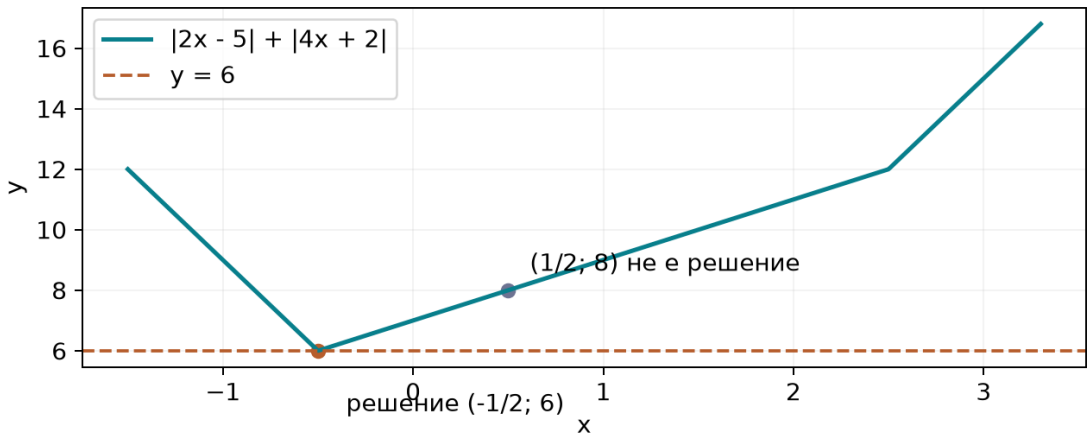
Този кандидат не принадлежи на първия интервал.

$$-\tfrac{1}{2} \le x < \tfrac{5}{2}: \quad (5 - 2x) + (4x + 2) = 6 \quad \implies \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Тук кандидатът е допустим. На границата вторият модул е нула.

$$x \ge \tfrac{5}{2}: \quad (2x - 5) + (4x + 2) = 6 \quad \implies \quad x = \tfrac{3}{2}.$$

Последният кандидат не принадлежи на третия интервал. Единственото решение е -1/2. Проверка: |-1 - 5| + |-2 + 2| = 6 + 0 = 6.



Отговор

$$x = -\tfrac{1}{2}.$$

A09. Вложени модули и крайни корени

СУ, 07.04.2024 г., задача 5

Намерете разликата между най-големия и най-малкия корен.

$$|||x-4|-3|-2|=1.$$

Как да се сетим

Развиване на модулите отвън навътре и тълкуване като разстояния.

Подробно решение

Означаваме B = ||x - 4| - 3|. От |B - 2| = 1 следва B = 3 или B = 1. И двете стойности са неотрицателни.

От ||x - 4| - 3| = 3 следва |x - 4| = 6 или |x - 4| = 0. От ||x - 4| - 3| = 1 следва |x - 4| = 4 или |x - 4| = 2.

$$|x-4|\in\{0,2,4,6\}.$$

$$x\in\{-2,0,2,4,6,8,10\}.$$

Има седем различни корена, защото при |x - 4| = 0 двете записи 4 ± 0 дават един корен. Най-крайните са симетрични спрямо 4 и са на разстояние 6 от него. Разликата е 12.



Отговор

$$x_{\min}=-2,\quad x_{\max}=10,\quad x_{\max}-x_{\min}=12.$$

A10. Брой решения на модулно квадратно уравнение

СУ, 11.06.2023 г., задача 4

Намерете броя на различните реални решения.

$$|2x^2 - 10x + 1| = \tfrac{23}{2}.$$

Как да се сетим

Два знакови клона; отделно броене на различните корени във всеки.

Подробно решение

$$2x^2 - 10x + 1 = \tfrac{23}{2} \quad \text{or} \quad 2x^2 - 10x + 1 = -\tfrac{23}{2}.$$

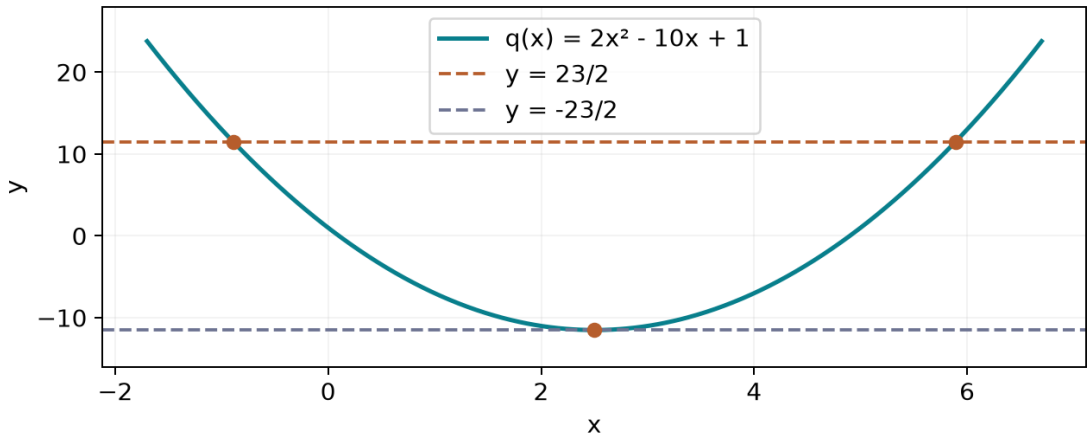
Първият клон е $4x^2 - 20x - 21 = 0$ и има положителна дискриминанта 736. Следователно дава два различни реални корена.

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{23}{2}}.$$

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{5}{2}.$$

Вторият клон дава един различен корен, независимо че той е двукратен. Двата клона не могат да имат общ корен, защото едно число не може да е едновременно 23/2 и -23/2. Общият брой е 2 + 1 = 3.

Графично: $2x^2 - 10x + 1 = 2(x - 5/2)^2 - 23/2$. Правата $y = -23/2$ докосва параболата във върха, а $y = 23/2$ я пресича два пъти.



Отговор

$$N = 3.$$

A11. Квадрат на израз и модул на същия израз

СУ, 18.06.2016 г., задача 26

Решете уравнението.

$$(x^2+2x)^2-2|x^2+2x|-3=0.$$

PDF стр. 17 е обърната на 180 градуса; стр. 18 е второто, изправено заснемане на същата страница. Първият ред на стр. 18 довършва тази задача. Не се брои като ново условие.

Как да се сетим

Замяна $t = |x^2 + 2x| \geq 0$ и равенство $a^2 = |a|^2$.

Подробно решение

Тъй като квадратът на израз е равен на квадрата на неговия модул, въвеждаме $t = |x^2 + 2x|$. Записваме $t \geq 0$ още при замяната.

$$t^2-2t-3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t-3)(t+1)=0.$$

Коренът t = -1 се отхвърля, защото модул не може да е отрицателен. Остава t = 3.

$$|x^2+2x|=3 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+2x=3 \quad\text{or}\quad x^2+2x=-3.$$

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)=0.$$

Другият клон е $x^2 + 2x + 3 = 0$ и има D = -8, следователно няма реални корени. За x = 1 и x = -3 вътрешният израз е 3 и проверката дава 9 - 6 - 3 = 0.

Отговор

$$x\in\{-3,1\}.$$

A12. Модул в знаменател

СУ, 19.03.2017 г., задача 1

Решете уравнението.

$$|x| - \frac{5}{|x|} = -4.$$

Как да се сетим

Допустими стойности и замяна t = |x| > 0.

Подробно решение

Знаменателят изключва x = 0. Следователно при t = |x| имаме строгото ограничение t > 0, а не само t ≥ 0.

$$t - \frac{5}{t} = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + 4t - 5 = 0.$$

$$(t-1)(t+5) = 0, \qquad t = 1 \quad \text{or} \quad t = -5.$$

Приемаме само t = 1. Връщаме се към x: |x| = 1 дава x = -1 или x = 1. И за двете стойности лявата страна е 1 - 5 = -4.

Отговор

$$x \in \{-1, 1\}.$$