A01. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A01. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A01-П1. За $x^2 - 5x + 6 = 0$ намерете сбора S и произведението P на корените, без да ги намирате.

Припомняне: Виет: $S = -b/a$, $P = c/a$.

Подсказка: Посочете a, b и c със знаците им.

Контролно решение: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$. Следователно $S = 5$, $P = 6$.

A01-П2. Разложете $x^2 - 5x + 6$ и намерете корените.

Припомняне: $(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$.

Подсказка: Потърсете две числа със сбор 5 и произведение 6.

Контролно решение: $(x - 2)(x - 3) = 0$. Корените са 2 и 3.

A01-П3. Ако $a + b = 5$ и $ab = 6$, намерете $a^2 + b^2$.

Припомняне: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

Подсказка: Разкрийте квадрата на сбора.

Контролно решение: $a^2 + b^2 = 25 - 12 = 13$.

A01-П4. За $a = 2$ и $b = 3$ пресметнете $a/b + b/a$.

Припомняне: Общият знаменател е ab.

Подсказка: Съберете числителите a^2 и b^2.

Контролно решение: $2/3 + 3/2 = 4/6 + 9/6 = 13/6$.

A01. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A01. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A01-П5. Ако ab = 6, възможно ли е a = 0 или b = 0? Какво е (a/b)(b/a)?

Припомняне: Нулев множител дава нулево произведение.

Подсказка: Първо обосновете допустимостта на двете дроби.

Контролно решение: Нито a, нито b е 0. Произведението на дробите е ab/(ab) = 1.

A01-П6. Съставете уравнение с корени със сбор 5 и произведение 6.

Припомняне: Уравнението е $u^2 - Su + P = 0$.

Подсказка: Средният коефициент е противоположен на сбора.

Контролно решение: $u^2 - 5u + 6 = 0$.

A01-П7. Съставете уравнение с корени 2/3 и 3/2, без дробни коефициенти.

Припомняне: Сборът е 13/6, произведението е 1.

Подсказка: Първо запишете приведено уравнение, после умножете по 6.

Контролно решение: $u^2 - (13/6)u + 1 = 0$, тоест $6u^2 - 13u + 6 = 0$.

A01-П8. Корените на $x^2 - 4x + 2 = 0$ са a и b. Съставете уравнение за a/b и b/a.

Припомняне: Нужни са само S = a + b и P = ab.

Подсказка: Новият сбор е $(S^2 - 2P)/P$, а произведението е 1.

Контролно решение: S = 4, P = 2, нов сбор = (16 - 4)/2 = 6. Търсеното уравнение е $u^2 - 6u + 1 = 0$. Дробите са допустими, защото ab = 2 ≠ 0.

A02. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A02. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A02-П1. За $x^2 - 3x + 2 = 0$ намерете S и P по Виет.

Припомняне: $S = -b/a$, $P = c/a$.

Подсказка: Не намирайте корените.

Контролно решение: $S = 3$, $P = 2$.

A02-П2. Разкрийте $(a + b)^3$.

Припомняне: Умножете $(a + b)^2$ по $(a + b)$.

Подсказка: Първо запишете $a^2 + 2ab + b^2$.

Контролно решение: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

A02-П3. Изнесете общ множител от $3a^2b + 3ab^2$.

Припомняне: Общият множител е произведението на общите букви с най-ниска степен.

Подсказка: И двата члена съдържат $3ab$.

Контролно решение: $3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b)$.

A02-П4. Изразете $a^3 + b^3$ чрез $S = a + b$ и $P = ab$.

Припомняне: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Подсказка: Прехвърлете допълнителния член.

Контролно решение: $a^3 + b^3 = S^3 - 3PS$.

A02. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A02. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A02-П5. Ако a + b = 3 и ab = 2, намерете $a^3 + b^3$.

Припомняне: Използвайте предишната формула.

Подсказка: Запазете скоби при произведението.

Контролно решение: $a^3 + b^3 = 27 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 9$.

A02-П6. Корените на $x^2 + x - 2 = 0$ са a и b. Намерете $a^3 + b^3$.

Припомняне: По Виет S = -1, P = -2.

Подсказка: Внимавайте за трите отрицателни знака.

Контролно решение: $S^3 - 3PS = -1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) = -7$. Проверка с корени 1 и -2: 1 - 8 = -7.

A02-П7. Ако r е корен на $x^2 - 3x + 2 = 0$, изразете r^3 като линеен израз на r.

Припомняне: $r^2 = 3r - 2$.

Подсказка: Умножете по r и отново заместете r^2.

Контролно решение: $r^3 = 3r^2 - 2r = 3(3r - 2) - 2r = 7r - 6$.

A02-П8. За същото уравнение намерете сбора на кубовете по начина от предишната задача.

Припомняне: Всеки корен удовлетворява $r^3 = 7r - 6$.

Подсказка: Съберете двете равенства.

Контролно решение: $a^3 + b^3 = 7(a + b) - 12 = 21 - 12 = 9$. Получаваме същото като чрез Виет и куб на сбор.

А03. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към А03. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

А03-П1. Проверете дали 1 е корен на $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$.

Припомняне: Числото е корен точно когато стойността на полинома е 0.

Подсказка: Заместете на всяко място.

Контролно решение: $P(1) = 1 + 1 - 4 + 2 = 0$.

А03-П2. Разкрийте $(x - 1)(x^2 + 2x - 2)$.

Припомняне: Всеки член на първата скоба умножава всеки на втората.

Подсказка: Съберете едноименните степени.

Контролно решение: $x^3 + 2x^2 - 2x - x^2 - 2x + 2 = x^3 + x^2 - 4x + 2$.

А03-П3. За корените a и b на $x^2 + 2x - 2 = 0$ намерете $a + b$ и ab.

Припомняне: Формули на Виет.

Подсказка: Средният коефициент е +2.

Контролно решение: $a + b = -2$, $ab = -2$.

А03-П4. Опростете $1/(3 - a) + 1/(3 - b)$, когато $a \neq 3$ и $b \neq 3$.

Припомняне: При събиране на дроби числителите се допълват до общ знаменател.

Подсказка: Общият знаменател е $(3 - a)(3 - b)$.

Контролно решение: Получаваме $(6 - a - b)/(9 - 3(a + b) + ab)$.

A03. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A03. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A03-П5. При a + b = 1 и ab = -2 пресметнете предишния израз.

Припомняне: Използвайте получения израз чрез сбор и произведение.

Подсказка: Заместете двете числа.

Контролно решение: (6 - 1)/(9 - 3 - 2) = 5/4. Знаменателят е ненулев.

A03-П6. За P(x) от задача 1 изчислете P(2). Какво следва за дробите $1/(2 - x_i)$?

Припомняне: Ако 2 беше корен, P(2) би било 0.

Подсказка: Сравнете резултата с нула.

Контролно решение: P(2) = 8 + 4 - 8 + 2 = 6 ≠ 0. Нито един корен x_i не е 2, следователно дробите са определени.

A03-П7. Разкрийте (k - a)(k - b)(k - c) чрез сборовете $s_1 = a+b+c$, $s_2 = ab+ac+bc$, $s_3 = abc$.

Припомняне: Първо умножете две скоби.

Подсказка: Подредете по степени на k.

Контролно решение: Получаваме $k^3 - s_1k^2 + s_2k - s_3$.

A03-П8. Ако a, b, c са корените на $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, намерете 1/(3-a) + 1/(3-b) + 1/(3-c).

Припомняне: Виет за трета степен: $s_1 = 2$, $s_2 = -1$, $s_3 = -2$.

Подсказка: Общият числител е $3k^2 - 2ks_1 + s_2$; знаменателят е $k^3 - k^2s_1 + ks_2 - s_3$.

Контролно решение: При k = 3 числителят е 27 - 12 - 1 = 14, знаменателят е 27 - 18 - 3 + 2 = 8. Отговор: 7/4. Ненулевият знаменател потвърждава допустимостта.

A04. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A04. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A04-П1. Числото 2 е корен на $ax^2 + bx + 8 = 0$. Запишете връзката между a и b.

Припомняне: При корен стойността е нула.

Подсказка: Заместете $x = 2$.

Контролно решение: $4a + 2b + 8 = 0$, тоест $2a + b = -4$.

A04-П2. Решете системата $2a + b = -4$, $a + b = 3$.

Припомняне: Изваждане на уравнения.

Подсказка: Второто неизвестно се унищожава при изваждане.

Контролно решение: $a = -7$; $b = 3 - a = 10$.

A04-П3. Как е насочена параболата $y = -2x^2 + 4x + 1$? Има ли максимум?

Припомняне: Знакът на a определя посоката.

Подсказка: Тук $a = -2$.

Контролно решение: Раменете са надолу. На реалната ос има максимум и няма минимум.

A04-П4. Намерете абсцисата на върха на $y = -2x^2 + 4x + 1$.

Припомняне: $x_o = -b/(2a)$.

Подсказка: Поставете $b = 4$ и $a = -2$.

Контролно решение: $x_o = -4/(-4) = 1$.

A04. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A04. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A04-П5. Намерете максималната стойност на същата функция.

Припомняне: Стойността във върха е $y(x_0)$.

Подсказка: Заместете $x = 1$.

Контролно решение: $y(1) = -2 + 4 + 1 = 3$.

A04-П6. Допълнете до квадрат: $-2x^2 + 4x + 1$.

Припомняне: $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.

Подсказка: Изнесете първо -2.

Контролно решение: $-2(x^2 - 2x) + 1 = -2(x - 1)^2 + 3$.

A04-П7. Обяснете разликата между $x_0 = 1$ и $y(1) = 3$.

Припомняне: Аргументът и стойността на функцията са различни координати.

Подсказка: Посочете координатите на върха.

Контролно решение: Върхът е (1; 3). Максимумът се достига при $x = 1$, а самият максимум е 3.

A04-П8. Числото 1 е корен на $ax^2 + bx + 6 = 0$ и $a + 2b = 0$. Намерете екстремума.

Припомняне: От корена: $a + b = -6$.

Подсказка: Решете системата и намерете върха.

Контролно решение: От $a = -2b$ получаваме $b = 6$, $a = -12$. Функцията е $-12x^2 + 6x + 6 = -12(x - 1/4)^2 + 27/4$. Максимумът е 27/4 при $x = 1/4$.

A05. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A05. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A05-П1. За кои реални x изразът x + 1/x е определен?

Припомняне: Знаменател не може да е нула.

Подсказка: Погледнете знаменателя x.

Контролно решение: За всички реални $x \neq 0$.

A05-П2. Разкрийте $(x + 1/x)^2$ при $x \neq 0$.

Припомняне: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Подсказка: Произведението $x \cdot (1/x)$ е 1.

Контролно решение: Получаваме $x^2 + 2 + 1/x^2$.

A05-П3. При $t = x + 1/x$ изразете $x^2 + 1/x^2$.

Припомняне: Използвайте предишния резултат.

Подсказка: Извадете 2.

Контролно решение: $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$.

A05-П4. Пресметнете t при x = 2 и при x = 1/2.

Припомняне: $t = x + 1/x$.

Подсказка: Двете стойности са реципрочни.

Контролно решение: И в двата случая $t = 5/2$. Една стойност на t може да съответства на две стойности на x.

A05. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A05. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A05-П5. Решете $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Припомняне: Разлагане на квадратен тричлен.

Подсказка: Проверете $(2t - 1)(t - 2)$.

Контролно решение: $t = 1/2$ или $t = 2$.

A05-П6. Решете $x + 1/x = 2$ в реални числа.

Припомняне: При $x \neq 0$ умножете по x.

Подсказка: Получава се пълен квадрат.

Контролно решение: $x^2 - 2x + 1 = 0$, оттук $x = 1$. Той е допустим.

A05-П7. Има ли реално решение $x + 1/x = 1/2$?

Припомняне: След умножаване получаваме квадратно уравнение.

Подсказка: Проверете дискриминантата.

Контролно решение: $2x^2 - x + 2 = 0$, $D = 1 - 16 = -15$. Няма реално решение.

A05-П8. Решете $x^2 + 1/x^2 - (5/2)(x + 1/x) + 3 = 0$.

Припомняне: При $t = x + 1/x$ първите два члена дават $t^2 - 2$.

Подсказка: Помощното уравнение е $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Контролно решение: t е $1/2$ или 2. Първият случай няма реални x, а вторият дава $x = 1$. Проверка: $2 - 5 + 3 = 0$.

A06. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A06. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A06-П1. Сравнете коефициентите на $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ отляво надясно и обратно.

Припомняне: Реципрочен полином има симетрични коефициенти.

Подсказка: Запишете петте коефициента в ред.

Контролно решение: Получаваме 1, -5, 6, -5, 1 и в двете посоки.

A06-П2. Може ли 0 да е корен на този полином?

Припомняне: При x = 0 остава свободният член.

Подсказка: Пресметнете P(0).

Контролно решение: P(0) = 1, следователно 0 не е корен.

A06-П3. Разделете равенството $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$ на x^2.

Припомняне: Предишната задача позволява делението за всеки възможен корен.

Подсказка: Разделете всеки член поотделно.

Контролно решение: $x^2 - 5x + 6 - 5/x + 1/x^2 = 0$.

A06-П4. Групирайте предишното равенство чрез x + 1/x.

Припомняне: $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$.

Подсказка: Съберете линейните реципрочни членове.

Контролно решение: $(x^2 + 1/x^2) - 5(x + 1/x) + 6 = 0$. При $t = x + 1/x$ получаваме $t^2 - 5t + 4 = 0$.

A06. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A06. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A06-П5. Решете $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Припомняне: Сборът на корените е 5, произведението е 4.

Подсказка: Потърсете целочислени корени.

Контролно решение: $(t - 1)(t - 4) = 0$, тоест $t = 1$ или $t = 4$.

A06-П6. Коя от стойностите $t = 1$ и $t = 4$ може да е $x + 1/x$ за реално x?

Припомняне: Необходимо и достатъчно е $t^2 - 4 \geq 0$.

Подсказка: Проверете двете стойности.

Контролно решение: $t = 1$ не може; $t = 4$ може.

A06-П7. Решете $x + 1/x = 4$.

Припомняне: Умножете по ненулевото x.

Подсказка: Решете $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Контролно решение: $x = 2 - \sqrt{3}$ или $x = 2 + \sqrt{3}$. И двете числа са ненулеви.

A06-П8. Проверете разлагането $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1)$.

Припомняне: Умножете двете скоби и съберете едноименните степени.

Подсказка: След това сравнете дискриминантите на двата множителя.

Контролно решение: Произведението е точно даденият полином. Първият множител има $D = -3$, вторият $D = 12$. Реалните корени са само $2 \pm \sqrt{3}$.

A07. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A07. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A07-П1. Разложете $x^2 - x - 2$.

Припомняне: Търсим числа със сбор -1 и произведение -2.

Подсказка: Подходящи са -2 и 1.

Контролно решение: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

A07-П2. Намерете допустимите стойности за $2/(2-x) + 6/(x^2-x-2)$.

Припомняне: Всеки знаменател трябва да е ненулев.

Подсказка: Използвайте предишното разлагане.

Контролно решение: $x \neq 2$ и $x \neq -1$.

A07-П3. Изразете $2/(2 - x)$ чрез знаменател $x - 2$.

Припомняне: $2 - x = -(x - 2)$.

Подсказка: Изнесете минуса от знаменателя.

Контролно решение: $2/(2 - x) = -2/(x - 2)$, при $x \neq 2$.

A07-П4. Съберете $-2/(x - 2)$ и $6/((x - 2)(x + 1))$.

Припомняне: Общият знаменател съдържа двата различни множителя.

Подсказка: Първият числител се умножава по $x + 1$.

Контролно решение: Получаваме $(-2x + 4)/((x - 2)(x + 1))$, при $x \neq 2, -1$.

A07. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A07. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A07-П5. Решете (-2x + 4)/((x - 2)(x + 1)) = 1, като пазите ограниченията.

Припомняне: Дробта е определена само за $x \neq 2, -1$.

Подсказка: Умножете по общия знаменател.

Контролно решение: $-2x + 4 = x^2 - x - 2$, тоест $x^2 + x - 6 = 0$. Кандидатите са -3 и 2; допустим е само -3.

A07-П6. Решете $(x^2 - 1)/(x - 1) = 2$.

Припомняне: Първо $x \neq 1$; след съкращаване ограничението остава.

Подсказка: Разложете $x^2 - 1$.

Контролно решение: При $x \neq 1$ уравнението става $x + 1 = 2$, откъдето $x = 1$. Той е забранен, следователно няма решения.

A07-П7. Проверете x = -3 в 2/(2-x) + 6/(x²-x-2) = 1.

Припомняне: Проверява се в първоначалните знаменатели.

Подсказка: Пресметнете ги поотделно.

Контролно решение: 2 - (-3) = 5 и 9 + 3 - 2 = 10. Получаваме 2/5 + 6/10 = 1.

A07-П8. Защо не можем да приемем x = 2 след умножаване по общ знаменател?

Припомняне: Еквивалентността е само в предварително записаната област.

Подсказка: Проверете началната дроб.

Контролно решение: При $x = 2$ и двата знаменателя са нула. Полученото полиномиално равенство има по-голяма област, затова този негов корен не решава началното уравнение.

A08. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A08. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A08-П1. Пресметнете |-3|, |0| и |5|.

Припомняне: Модулът е разстояние до 0.

Подсказка: Разстоянието е неотрицателно.

Контролно решение: Стойностите са 3, 0 и 5.

A08-П2. Намерете нулите на 2x - 5 и 4x + 2.

Припомняне: Линеен израз сменя знак в своята нула.

Подсказка: Решете двете линейни уравнения.

Контролно решение: Нулите са 5/2 и -1/2. На оста -1/2 е вляво от 5/2.

A08-П3. Определете знаците на двата израза при x = -1, x = 0 и x = 3.

Припомняне: Може да се избере по една пробна точка във всеки интервал.

Подсказка: Заместете и запишете само знаците.

Контролно решение: При -1: отрицателен, отрицателен; при 0: отрицателен, положителен; при 3: положителен, положителен.

A08-П4. Разкрийте |2x - 5| + |4x + 2| при -1/2 ≤ x < 5/2.

Припомняне: За неположителен u имаме |u| = -u, а за неотрицателен |u| = u.

Подсказка: Поставете скоби преди премахването на минус.

Контролно решение: -(2x - 5) + (4x + 2) = -2x + 5 + 4x + 2 = 2x + 7.

A08. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A08. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A08-П5. Решете 2x + 7 = 6 и проверете дали x е в [-1/2; 5/2).

Припомняне: Линейното решение трябва да принадлежи на съответния интервал.

Подсказка: Извадете 7 и разделете на 2.

Контролно решение: x = -1/2. Лявата граница е включена, така че кандидатът е допустим.

A08-П6. Проверете x = 1/2 и x = -1/2 в |2x - 5| + |4x + 2| = 6.

Припомняне: Най-сигурната проверка използва първоначалното условие.

Подсказка: Сметнете двата модула поотделно.

Контролно решение: При x = 1/2 получаваме 4 + 4 = 8 ≠ 6. При x = -1/2 получаваме 6 + 0 = 6. Само -1/2 решава уравнението.

A08-П7. Решете |x - 1| + |x + 1| = 2.

Припомняне: Критични точки: -1 и 1.

Подсказка: В средния интервал сумата е постоянна.

Контролно решение: За -1 ≤ x ≤ 1 сумата е (1-x) + (x+1) = 2. Извън него е по-голяма. Множеството решения е [-1; 1], тоест не всяко модулно уравнение има само отделни корени.

A08-П8. Решете |x - 2| + |2x + 2| = 5.

Припомняне: Критични точки -1 и 2.

Подсказка: Разгледайте трите интервала и проверете кандидатите.

Контролно решение: При x < -1: -3x = 5, x = -5/3 е допустим. При -1 ≤ x < 2: x + 4 = 5, x = 1 е допустим. При x ≥ 2: 3x = 5 дава 5/3 извън интервала. Отговор: {-5/3; 1}.

A09. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A09. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A09-П1. Решете |x - 4| = 2.

Припомняне: |x - a| е разстоянието от x до a.

Подсказка: От 4 се отдалечете с 2 наляво и надясно.

Контролно решение: x = 2 или x = 6.

A09-П2. Решете |x - 4| = 0 и |x - 4| = -1.

Припомняне: Разстояние не може да е отрицателно.

Подсказка: Разгледайте двете уравнения отделно.

Контролно решение: Първото има един корен x = 4. Второто няма реални решения.

A09-П3. Решете |t - 2| = 1.

Припомняне: Вътрешният израз е равен на 1 или на -1.

Подсказка: t - 2 = ±1.

Контролно решение: t = 3 или t = 1.

A09-П4. Решете ||x - 1| - 2| = 1.

Припомняне: Започнете от външния модул.

Подсказка: Първо |x - 1| = 3 или |x - 1| = 1.

Контролно решение: Корените са -2, 4, 0 и 2. Като множество: {-2; 0; 2; 4}.

A09. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A09. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A09-П5. Решете ||x - 1| - 2| = 2.

Припомняне: При вътрешен резултат 0 се получава само един корен.

Подсказка: |x - 1| = 4 или |x - 1| = 0.

Контролно решение: Корените са -3, 5 и 1. Различните корени са три, а не четири.

A09-П6. Намерете крайните корени на |x - 4| = 6 и разликата им.

Припомняне: Двата корена са симетрични спрямо 4.

Подсказка: Запишете 4 - 6 и 4 + 6.

Контролно решение: Крайните корени са -2 и 10. Разликата е 10 - (-2) = 12.

A09-П7. Съберете без повторения корените на |x - 4| = 0, 2, 4 или 6.

Припомняне: Всяка положителна дясна страна дава по два корена, нулата дава един.

Подсказка: Използвайте 4 ± k.

Контролно решение: Получаваме {-2; 0; 2; 4; 6; 8; 10}. Има седем различни корена.

A09-П8. Решете ||x - 2| - 1| = 2 и намерете разликата между крайните корени.

Припомняне: Външният модул дава |x - 2| = 3 или -1.

Подсказка: Отхвърлете отрицателното разстояние.

Контролно решение: Остава |x - 2| = 3. Корените са -1 и 5, а разликата е 6.

A10. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A10. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A10-П1. Запишете 11,5 като несъкратима дроб.

Припомняне: Умножете по 10 и съкратете.

Подсказка: 115/10 се съкращава на 5.

Контролно решение: 11,5 = 23/2.

A10-П2. Разкрийте $(2x - 5)^2$.

Припомняне: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Подсказка: Не пропускайте двойното произведение.

Контролно решение: Получаваме $4x^2 - 20x + 25$.

A10-П3. Решете $(2x - 5)^2 = 0$. Колко различни корена има?

Припомняне: Квадрат е нула само когато основата е нула.

Подсказка: Решете $2x - 5 = 0$.

Контролно решение: $x = 5/2$. Има един различен корен с кратност две.

A10-П4. За $4x^2 - 20x - 21 = 0$ определете броя на реалните корени без намирането им.

Припомняне: $D > 0$ дава два различни реални корена.

Подсказка: $D = b^2 - 4ac$.

Контролно решение: $D = 400 + 336 = 736 > 0$. Корените са два.

А10. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към А10. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

А10-П5. На кои два клона е равносилно |q(x)| = 23/2?

Припомняне: При положителна дясна страна има два знака.

Подсказка: Запазете една и съща абсолютна стойност.

Контролно решение: q(x) = 23/2 или q(x) = -23/2.

А10-П6. Могат ли тези два клона да имат общ корен?

Припомняне: Функция има една стойност за всеки аргумент.

Подсказка: Общ корен би дал 23/2 = -23/2.

Контролно решение: Не могат. Двете стойности са различни.

А10-П7. Единият клон има два различни корена, а другият един двукратен. Колко са различните корени общо, ако клоновете не се пресичат?

Припомняне: Кратността не е брой различни числа.

Подсказка: Броим 2 + 1.

Контролно решение: Общо три различни корена.

А10-П8. За $q(x) = 2(x - 5/2)^2 - 23/2$ опишете с графика броя решения на |q(x)| = 23/2.

Припомняне: Модулното уравнение съответства на две хоризонтални прави.

Подсказка: Едната е през върха на параболата.

Контролно решение: y = -23/2 докосва върха в една точка. y = 23/2 пресича параболата в две точки. Общо решенията са три.

A11. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A11. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A11-П1. Пресметнете $(-3)^2$ и $|-3|^2$. Какво е общото правило?

Припомняне: Квадратът премахва знака.

Подсказка: Сравнете получените стойности.

Контролно решение: И двете са 9. За всяко реално a е вярно $a^2 = |a|^2$.

A11-П2. Ако $t = |x^2 + 2x|$, какво ограничение има t?

Припомняне: Модулът е неотрицателен.

Подсказка: Допустимо ли е t = 0?

Контролно решение: $t \geq 0$. Нулата е възможна, например при x = 0 или x = -2.

A11-П3. Решете $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Припомняне: Търсете два линейни множителя.

Подсказка: Проверете (t - 3)(t + 1).

Контролно решение: t = 3 или t = -1.

A11-П4. Кой от тези корени остава, ако t е модул?

Припомняне: Помощното неизвестно трябва да спазва ограничението си.

Подсказка: Модул може ли да е -1?

Контролно решение: Остава само t = 3.

A11. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A11. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A11-П5. На кои два клона е равносилно $|x^2 + 2x| = 3$?

Припомняне: $|u| = 3$ означава $u = 3$ или $u = -3$.

Подсказка: Не извличайте квадратен корен.

Контролно решение: $x^2 + 2x = 3$ или $x^2 + 2x = -3$.

A11-П6. Решете $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Припомняне: Сборът на корените е -2, произведението -3.

Подсказка: Проверете корените 1 и -3.

Контролно решение: $(x - 1)(x + 3) = 0$, следователно $x = 1$ или $x = -3$.

A11-П7. Има ли реално решение $x^2 + 2x + 3 = 0$?

Припомняне: Може да използвате дискриминанта или пълен квадрат.

Подсказка: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$.

Контролно решение: Не. Изразът е поне 2; еквивалентно $D = 4 - 12 = -8 < 0$.

A11-П8. Решете $(x^2 + 2x)^2 - 2|x^2 + 2x| - 3 = 0$ и направете проверка.

Припомняне: Свържете предишните седем стъпки.

Подсказка: Пазете $t \geq 0$ и проверете двата обратни клона.

Контролно решение: Остава $t = 3$. Единственият реален клон дава $x = 1$ или $x = -3$. За всяко от тях $x^2 + 2x = 3$, така че $9 - 6 - 3 = 0$.

A12. Подготовка - стъпки 1-4

Нови упражнения към A12. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A12-П1. За кои реални x дробта 5/|x| е определена?

Припомняне: Знаменателят е ненулев точно когато $x \neq 0$.

Подсказка: $|x| = 0$ е равносилно на $x = 0$.

Контролно решение: Областта е всички реални числа без 0.

A12-П2. При $t = |x|$ и $x \neq 0$ запишете точното ограничение за t.

Припомняне: Модулът е неотрицателен, а нулата тук е изключена.

Подсказка: Сравнете $t \geq 0$ с $t > 0$.

Контролно решение: Точното ограничение е $t > 0$.

A12-П3. При $t > 0$ преобразувайте $t - 5/t = -4$ до полиномно уравнение.

Припомняне: Може да се умножи по ненулевото t.

Подсказка: Умножете всеки член.

Контролно решение: $t^2 - 5 = -4t$, тоест $t^2 + 4t - 5 = 0$.

A12-П4. Разложете $t^2 + 4t - 5$.

Припомняне: Две числа със сбор 4 и произведение -5.

Подсказка: Подходящи са 5 и -1.

Контролно решение: $(t + 5)(t - 1)$.

A12. Подготовка - стъпки 5-8

Нови упражнения към A12. Опитайте самостоятелно преди подсказката.

A12-П5. Решете (t + 5)(t - 1) = 0 при t > 0.

Припомняне: Нулево произведение означава поне един нулев множител.

Подсказка: Проверете всяка стойност спрямо ограничението.

Контролно решение: Кандидатите са -5 и 1. Приемаме само 1.

A12-П6. Решете |x| = 1.

Припомняне: Модулът е разстоянието до нула.

Подсказка: Има две симетрични точки.

Контролно решение: x = -1 или x = 1.

A12-П7. Проверете двете стойности в |x| - 5/|x| = -4.

Припомняне: Двете имат един и същ модул.

Подсказка: И за двете |x| = 1.

Контролно решение: Лявата страна е 1 - 5 = -4. И двете са допустими и решават уравнението.

A12-П8. Решете |x| - 6/|x| = 1.

Припомняне: Първо $x \neq 0$, после $t = |x| > 0$.

Подсказка: Получава се $t^2 - t - 6 = 0$.

Контролно решение: (t - 3)(t + 2) = 0. При t > 0 остава t = 3. Следователно x = -3 или x = 3. Проверка: 3 - 6/3 = 1.