СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

12 април 2025 г.

Тема №3.

отговори и примерни решения на задачите

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	А	**Б**	В	Г
2.	А	Б	**В**	Г
3.	А	Б	В	**Г**
4.	А	Б	В	**Г**
5.	А	Б	**В**	Г
6.	**А**	Б	В	Г
7.	А	**Б**	В	Г
8.	**А**	Б	В	Г
9.	А	Б	В	**Г**
10.	А	Б	**В**	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = 6 - 3\sqrt{3}$
12.	$x = -\dfrac{1}{2}$

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13.Дадена е квадратната функция $f(x) = x^2 - (6k+2)x + 10k^2 - k + 11$, където k е реален параметър.

а) Да се определи за кои стойности на k уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени;

б) Да се определи за кои стойности на k сумата от квадратите на реалните корени на уравнението $f(x) = 0$ достига най-малката и най-голямата си стойности.

Решение:

а) Квадратното уравнение $f(x) = 0$ няма реални корени точно когато дискриминантата му D е по-малка от нула. Пресмятаме

$$\begin{aligned} D &= (6k+2)^2 - 4(10k^2 - k + 11) = 36k^2 + 24k + 4 - 40k^2 + 4k - 44 \\ &= -4k^2 + 28k - 40 = -4(k^2 - 7k + 10) = -4(k-2)(k-5), \end{aligned}$$

откъдето $D < 0$ за $k \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$.

б) От а) подусловие следва, че уравнението има реални корени за $k \in [2; 5]$. От формулите на Виет имаме $\left| \begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = 6k + 2 \\ x_1 x_2 & = 10k^2 - k + 11 \end{array} \right.$ $\cdot$ Пресмятаме

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 36k^2 + 24k + 4 - 20k^2 + 2k - 22 = 16k^2 + 26k - 18,$$

което е квадратна функция на k с положителен старши коефициент. Върхът на параболата се достига за $k_0 = -\dfrac{26}{2.16} = -\dfrac{13}{16} < 2$. Точката k_0 лежи отляво на интервала $[2; 5]$, откъдето следва, че в $[2; 5]$ квадратната функция $16k^2 + 26k - 18$ е растяща. Следователно тя достига своята най-малка стойност в левия край за интервала, тоест за $k = 2$, и своята най-голяма стойност в десния край, за $k = 5$.

. . . . . .

Задача 14. В триъгълник ABC отсечката AL, $L \in BC$, е вътрешна ъглополовяща, а точката M е средата на страната AB. Дадено е, че $AB = 14$, $AC = 11$ и $LM = LB$. Да се намери дължината на страната BC.

Решение:

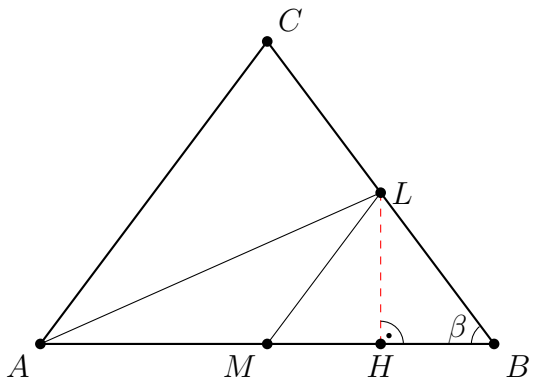
1 начин:

1) AL е ъглополовяща, от свойството на ъглополовящата получаваме

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC} = \frac{14}{11}.$$

Да означим $BL = 14x$, $LC = 11x$, $x > 0$.

2) Построяваме $LH \perp AB$, $H \in AB$. $\triangle MLB$ е равнобедрен по условие $\Rightarrow$ LH е височина, ъглополовяща и медиана към основата $MB \Rightarrow BH = \dfrac{1}{4}AB = 3,5$.



3) Разглеждаме $\triangle BHL$, $\sphericalangle BHL = 90°$. Нека $\sphericalangle ABC = \beta$, тогава $\cos\beta = \dfrac{BH}{BL} = \dfrac{3,5}{14x} = \dfrac{1}{4x}$.

4) Прилагаме косинусова теорема за AC в $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\beta \\ 11^2 &= 14^2 + (25x)^2 - 2.14.25.x.\frac{1}{4x} \\ (25x)^2 &= 100 \\ x^2 &= \frac{100}{625} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{5},\ x > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 25.\frac{2}{5} = 10. \end{aligned}$$

2 начин:

1) AL е ъглополовяща в $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{BL}{LC} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{14}{11} \Rightarrow BL = 14x,\ LC = 11x,\ x > 0.$

2) От формулата за ъглополовящата AL в $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\begin{aligned} AL^2 &= AB.AC - BL.LC \\ AL^2 &= 14.11 - 14x.11x = 14.11.(1 - x^2) \Rightarrow x \in (0,1). \end{aligned}$$

3) LM - медиана в $\triangle ABL$ и $LM = LB = 14x$.

$$\begin{aligned} m_c^2 &= \frac{1}{4}.(2a^2 + 2b^2 - c^2) \\ ML^2 &= \frac{1}{4}(2.AL^2 + 2.LB^2 - AB^2) \\ (14x)^2 &= \frac{1}{4}.\Big(2.14.11.(1 - x^2) + 2.(14x)^2 - 14^2\Big) \\ 14.x^2 &= 4 - 11.x^2 \\ x^2 &= \frac{4}{25} \\ x_{1,2} &= \pm\frac{2}{5},\ x \in (0,1) \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = \frac{2}{5}.25 = 10. \end{aligned}$$

. . . . . .

Задача 15. Да се реши уравнението $\dfrac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{2} - \dfrac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{x^2} = \dfrac{x^2}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+\sqrt{2}}}$.

Решение: Допустимите стойности са $x \neq 0, -\sqrt{2}$. Директно се вижда, че $x = \sqrt{2}$ не е решение на уравнението (като заместим с $x = \sqrt{2}$, отляво получаваме 0, а от дясно - ненулево число). Рационализираме дясната част и делим двете страни на уравнението на $\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{x^2} &= \frac{x^2}{2}\sqrt[3]{\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}} \quad \Big/ : \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2}} \\ \frac{x^2-2}{2x^2} &= \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2}} \end{aligned}$$

$$(x^2-2)\sqrt[3]{x^2-2} = x^4$$
$$(x^2-2)^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{12}{3}}.$$

Оттук получаваме две възможности, $x^2-2=x^3$ или $x^2-2=-x^3$.

Първото уравнение, $x^2-2=x^3$ е еквивалентно на

$$x^3-x^2+2 = x^3+1-x^2+1 = (x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x+1) = (x+1)(x^2-2x+2).$$

Това уравнение има единствено реално решение $x_1=-1$.

Аналогично за второто уравнение, $x^2-2=-x^3$, получаваме $(x-1)(x^2+2x+2)=0$ и намираме второ решение $x_2=1$.

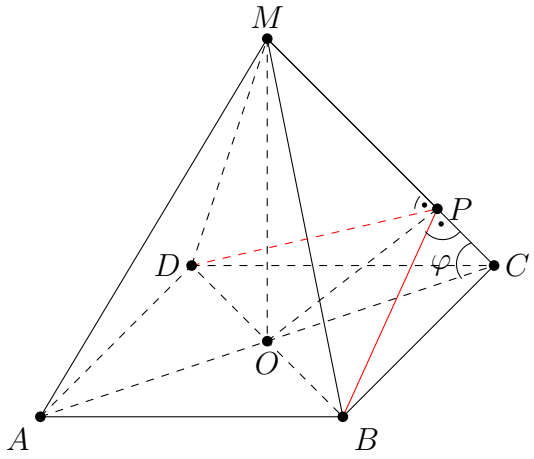
Понеже и двете стойности $x=1$ и $x=-1$ принадлежат на дефиниционното множество, то решенията на даденото в задачата уравнение са $x=1$ и $x=-1$.

. . . . . .

Задача 16. Двустенният ъгъл между две съседни околни стени на правилна четириъгълна пирамида е равен на 120°. Да се намери косинуса на ъгъла, който околен ръб на пирамидата сключва с равнината на основата ѝ.

Решение:

Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида. Нека $AB=a$.



1) Избираме точка $P \in CM$, такава че $BP \perp CM$. Тогава $\triangle BCM \cong \triangle DCM \Rightarrow DP \perp CM \Rightarrow \sphericalangle\Big((BMC),(DMC)\Big) = \sphericalangle BPD = 120°$. PO - височина, ъглополовяща и медиана в $\triangle BDP \Rightarrow \sphericalangle BPO = \sphericalangle DPO = 60°$.

2) Разглеждаме $\triangle BOP$. Той е правоъгълен. Имаме, че $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Значи $\frac{PO}{BO} = \operatorname{cotg} 60° \Rightarrow PO = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

3) Разглеждаме $\triangle MOC$ - правоъгълен. $OP \perp MC$, защото $MC \perp (BPD)$. Проекцията на MC в равнината $(ABCD)$ е $CO \Rightarrow \sphericalangle\Big(MC,(ABCD)\Big) = \sphericalangle MCO$. Нека да положим $\sphericalangle MCO = \varphi$. Тогава $\sin\varphi = \frac{OP}{OC} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следователно $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.