СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

18 април 2026 г.

Тема №3.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - x - 3 = 0$, то стойността на израза $x_1^3 + x_2^3$ е:

А) 10 ***Б)*** 1 ***В)*** -8 ***Г)*** -1

Задача 2. Даден е успоредник $ABCD$. Точката M е вътрешна за отсечката BC. Отсечките DM и AC се пресичат в точката O, като $S_{\Delta MOC} = 1$, $S_{\Delta ABM} = 8$. Лицето на успоредника $ABCD$ е равно на:

А) 28 ***Б)*** 22 ***В)*** 26 ***Г)*** 24

Задача 3. Решенията на системата $\left| \begin{array}{l} \log_x \log_3 \log_x y = 0 \\ \log_y 27 = 1 \end{array} \right.$ удовлетворяват уравнението:

А) $y = 5x + 12$ ***Б)*** $y = 9x + 9$ ***В)*** $y = 2x + 9$ ***Г)*** $y = 5x - 3$

Задача 4. Медианите AM и BN на триъгълник ABC се пресичат в точката G. Ако $AC = \sqrt{12}$, $BC = \sqrt{18}$ и четириъгълникът $CMGN$ е вписан в окръжност, косинусът на $\sphericalangle BCA$ е равен на:

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ***Б)*** $\dfrac{5\sqrt{6}}{24}$ ***В)*** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ***Г)*** $\dfrac{5\sqrt{3}}{24}$

Задача 5. С помощта на цифрите $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 са образувани всички възможни шестцифрени числа с различни цифри. Тези числа са записани едно до друго, като се започне от най-малкото. В новполученото число на 723 позиция се намира цифрата:

А) 5 ***Б)*** 3 ***В)*** 4 ***Г)*** 2

Задача 6. Ромб $ABCD$ с лице $S = 18$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ е основа на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Призмата има околен ръб, равен на 12. През върха D на ромба са построени височините му DP, $P \in AB$ и DQ, $Q \in BC$. Обемът на пирамидата A_1DPQ е равен на:

А) 18 ***Б)*** 24 ***В)*** 12 ***Г)*** 9

Задача 7. Броят решения на уравнението $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ в интервала $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right)$ е:

А) 3 ***Б)*** 4 ***В)*** 2 ***Г)*** 1

Задача 8. Дадено е кълбо с радиус $R = 2\sqrt{2}$. Равнината α отсича от кълбото кръг с лице, равно на една трета от най-големия му кръг. Разстоянието от равнината α до центъра на кълбото е:

А) $\sqrt{3}$ ***Б)*** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ***В)*** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ***Г)*** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Задача 9. За една аритметична прогресия е известно, че сумата на третия и деветия член е равна на най-малката стойност на функцията $2x^2 + 7x + 13$. Сумата на първите 11 члена на редицата е равна на:

А) $\dfrac{615}{16}$ ***Б)*** $\dfrac{610}{16}$ ***В)*** $\dfrac{605}{16}$ ***Г)*** $\dfrac{600}{16}$

Задача 10. Спрямо правоъгълна координатна система $K = Oxy$ в равнината е дадена елипса с каноничко уравнение $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Нека точката A е един от върховете на малката ос, а точките F_1 и F_2 са фокусите на елипсата. Периметърът на триъгълник AF_1F_2 е равен на:

А) $20+2\sqrt{5}$ ***Б)*** $10+2\sqrt{5}$ ***В)*** $20+4\sqrt{5}$ ***Г)*** $10+6\sqrt{5}$

Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!

Задача 11. Да се намерят всички корени на уравнението $6\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=-10$.

Задача 12. Дължините на страните на триъгълник са последователни естествени числа. Височината, спусната към средната страна, има дължина $6\sqrt{2}$. Да се намери радиусът на вписаната в триъгълника окръжност.

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Дадени са полиномът $p(x)=-x^3+13x^2-48x+36$ и числовата редица, такава, че за всяко естествено число n, сумата на първите n члена на редицата е равна на $p(n)$.

а) Колко члена (повече от един) от тази редица трябва да бъдат взети, така, че сумата им да е възможно най-голяма?

б) Кое е най-голямото число, което е член на тази редица? На кое място в редицата се намира то?

Задача 14. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ дължините на отсечките, свързващи средите на срещуположните му страни са a и b, $a>b$. Намерете лицето на четириъгълника, ако острият ъгъл между диагоналите му е равен на φ.

Задача 15. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които всяко решение на неравенството $\log_{\frac{1}{4-x}}(2x^2-5x-3)\geq -1$ е решение и на неравенството $x^2+a^2x\leq 2a^4$.

Задача 16. Околните ръбове на пирамида $ABCDM$ имат дължина 15. Основата на пирамидата е трапецът $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB>CD$, за който $CD=6$, $BD=12$ и $\sphericalangle ADC=150^\circ$. Да се докаже, че пирамидата може да се впише в сфера и да се намери радиуса на тази сфера.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!