СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

18 април 2026 г.

Тема №3.

отговори и примерни решения на задачите

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	**(X)**	Б	В	Г
2.	А	Б	В	**(X)**
3.	**(X)**	Б	В	Г
4.	А	**(X)**	В	Г
5.	А	**(X)**	В	Г
6.	А	Б	В	**(X)**
7.	А	**(X)**	В	Г
8.	А	Б	**(X)**	Г
9.	А	Б	**(X)**	Г
10.	А	**(X)**	В	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
12.	$r = 2\sqrt{2}$

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

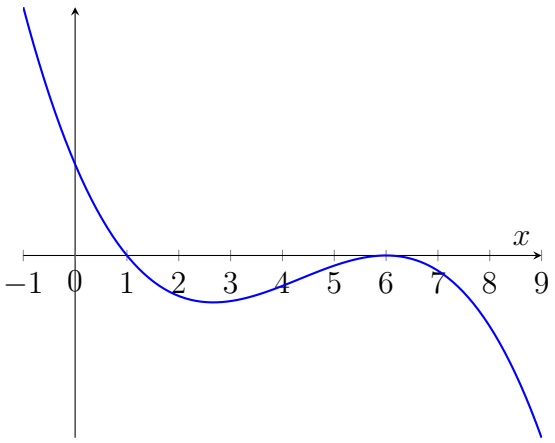
Задача 13.Дадени са полиномът $p(x) = -x^3 + 13x^2 - 48x + 36$ и числовата редица, такава, че за всяко естествено число n, сумата на първите n члена на редицата е равна на $p(n)$.

а) Колко члена (повече от един) от тази редица трябва да бъдат взети, така, че сумата им да е възможно най-голяма?

б) Кое е най-голямото число, което е член на тази редица? На кое място в редицата се намира то?

Решение:

Корените на полинома $p(x)$ са 1 и 6 (двукратен), тоест $p(x) = -(x-1)(x-6)^2$. Това означава, че в интервала $[1, +\infty)$, полиномът $p(x)$ приема неположителни стойности, като е 0 само за $x = 1$ и $x = 6$. Производната на $p(x)$ е $p'(x) = -3x^2 + 26x - 48$, като тя има корени $\frac{8}{3}$ и 6. Значи $p(x)$ намалява в интервалите $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$ и $(6; +\infty)$, и расте в интервала $\left(\frac{8}{3}; 6\right)$. Точката $\frac{8}{3}$ е локален минимум, а точката 6 - локален максимум. Графиката на функцията е следната:



От това веднага се вижда, че първият член на редицата е $a_1 = 0$, след това сумата на членовете на редицата е отрицателна, докато не стигнем до 6-тия член, където сумата е 0. След това сумата става отрицатена и намалява, тоест всеки следващ член след a_6 е отрицателен. Ще решим а) и б) едновременно. Понеже сумата на редицата расте в интервала $\left(\frac{8}{3}; 6\right)$, кандидатите за най-голям член са a_3, a_4, a_5 и a_6. Имаме, че

$$\begin{aligned} p(1) = 0 &\Rightarrow a_1 = 0, \\ p(2) = -16 &\Rightarrow a_2 = -16, \\ p(3) = -18 &\Rightarrow a_3 = -2, \\ p(4) = -12 &\Rightarrow a_4 = 6, \\ p(5) = -4 &\Rightarrow a_5 = 8, \\ p(6) = 0 &\Rightarrow a_6 = 4. \end{aligned}$$

Така единствените положителни членове са a_4, a_5 и a_6, като тяхната сума е най-голяма: 18. Понеже $a_1 = 0$, то и сумата на първия, четвъртия, петия и шестия член

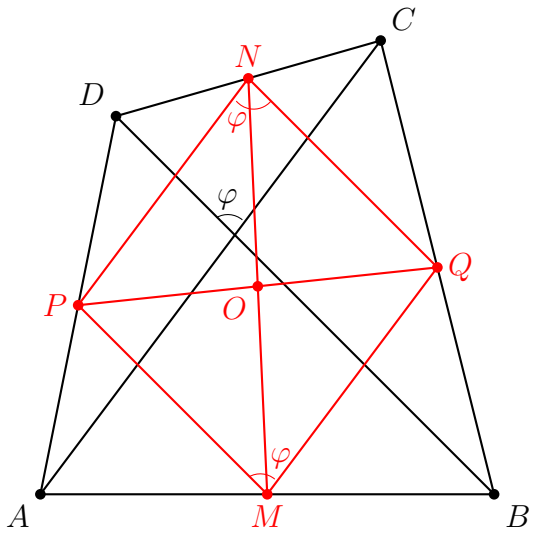
също е равна на 18. Най-голямото число, член на редицата, е 8, и се намира на пето място.

. . . . . .

Задача 14. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ дължините на отсечките, свързващи средите на срещуположните му страни са a и b, $a > b$. Намерете лицето на четириъгълника, ако острият ъгъл между диагоналите му е равен на φ.

Решение:

1) Нека точките M, Q, N и P са средите съответно на AB, BC, CD и DA.
Нека $MN = a$, $PQ = b$, $a > b$.
Нека $MN \cap PQ = O$.



2) Нека $AC = d_1$ и $BD = d_2$ са диагоналите на $ABCD$, и $\sphericalangle(d_1; d_2) = \varphi$, $\varphi \in (0°, 90°)$.

3) $MQ \parallel AC$, $MQ = \dfrac{AC}{2}$, като средна отсечка в ΔABC.
$NP \parallel AC$, $NP = \dfrac{AC}{2}$, като средна отсечка в ΔADC.
Така $MQ \parallel NP$, $MQ = NP = \dfrac{d_1}{2}$. Аналогично, $MP \parallel NQ$, $MP = NQ = \dfrac{d_2}{2}$.

4) От $MN > PQ$ следва, че $\sphericalangle PMQ = \varphi \in (0°, 90°)$ и $\sphericalangle MPN = 180° - \varphi \in (90°, 180°)$.

5) Понеже $S_{ABCD} = \dfrac{d_1.d_2.\sin\varphi}{2}$, то остава да намерим произведението на диагоналите d_1 и d_2.

6) От косинусова теорема за ΔMNP получаваме, че

$$MN^2 = PN^2 + PM^2 - 2.PN.PM.\cos(180° - \varphi),$$

тоест

$$a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + 2\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\cos\varphi. \tag{1}$$

Прилагаме косинусова теорема за ΔPQM: $PQ^2 = MQ^2 + MP^2 - 2.MQ.MP.\cos\varphi$, значи

$$b^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - 2\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\cos\varphi. \tag{2}$$

От разликата на равенствата (1) и (2) получаваме

$$a^2 - b^2 = d_1.d_2.\cos\varphi$$
$$d_1.d_2 = \frac{a^2 - b^2}{\cos\varphi}$$

Заместваме в S_{ABCD} и получаваме $S_{ABCD} = \dfrac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

. . . . . .

Задача 15. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които всяко решение на неравенството $\log_{\frac{1}{4-x}}(2x^2-5x-3) \geq -1$ е решение и на неравенството $x^2 + a^2x \leq 2a^4$.

Решение: Първо ще намерим множеството M_1 от решенията на логаритмичното неравенство $\log_{\frac{1}{4-x}}(2x^2 - 5x - 3) \geq -1$. Допустимите стойности са $\frac{1}{4-x} > 0$, $\frac{1}{4-x} \neq 1$ и $2x^2 - 5x - 3 > 0$. От първите две получаваме $x < 4$ и $x \neq 3$, а последното е еквивалентно на $(2x + 1)(x - 3) > 0$, откъдето $x < -\frac{1}{2}$ или $x > 3$. Окончателно получаваме, че допустимите стойности са $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 4)$. Можем да запишем неравенството в еквивалентния вид $\log_{4-x}(2x^2 - 5x - 3) \leq 1 = \log_{4-x}(4 - x)$. За да го решим, ще разгледаме два случая:

1сл. $4 - x > 1$, тоест $x < 3$. Като вземем предвид дефиниционната област, получаваме $x < -\frac{1}{2}$. В този случай неравенството е еквивалетно на $2x^2-5x-3 \leq 4-x$. Решенията му са $x \in \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$. Сечението с дефиниционната област е $x \in \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

2сл. $0 < 4 - x < 1$, тогава $x \in (3; 4)$. Неравенството е $2x^2 - 5x - 3 \geq 4 - x$, като то има решения $x \leq 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ или $x \geq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, което в комбинация с допустимите стойности дава $x \in \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4\right)$.

Окончателно, множеството M_1 от решенията на логаритмичното неравенство е $M_1 = \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4\right)$.

Нека сега намерим решенията на неравенство $x^2 + a^2x - 2a^4 \leq 0$. Корените на квадратното уравнение са $-2a^2$ и a^2, откъдето множеството от решенията M_2 на неравенството е $x \in [-2a^2, a^2]$. За да бъде всяко решение на първото неравенство решение и на второто, трябва $M_1 \subseteq M_2$. Това означава $-2a^2 \leq 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $a^2 \geq 4$. Получаваме, че $a^2 \geq \frac{3\sqrt{2}-2}{4}$ и $a^2 \geq 4$, откъдето $a^2 \geq 4$, тоест $|a| \geq 2$ или $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

. . . . . .

Задача 16. Околните ръбове на пирамида $ABCDM$ имат дължина 15. Основата на пирамидата е трапецът $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, за който $CD = 6$, $BD = 12$ и $\sphericalangle ADC = 150°$. Да се докаже, че пирамидата може да се впише в сфера и да се намери радиуса на тази сфера.

Решение:

1) $MA = MB = MC = MD = 15$. Нека т.O_1 е ортогоналната проекция на върха M в равнината на основата $ABCD$. Тогава $\Delta MAO_1 \cong \Delta MBO_1 \cong \Delta MCO_1 \cong \Delta MDO_1$ - правоъгълни с общ катет и равни хипотенузи. Следователно $AO_1 = BO_1 = CO_1 = DO_1$, тоест точката O_1 е на равни разстояния от върховете на $ABCD$. $ABCD$ е трапец, вписан в окръжност, с център O_1 и радиус R_1, следователно е равнобедрен.

Разглеждаме правата MO_1. За всяка точка $P \in MO_1$ е изпълнено

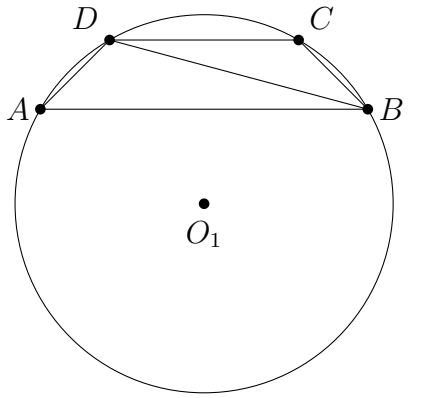
$$PA = PB = PC = PD. \tag{3}$$

Нека α е равнината, която минава през средата на ръба MC и е перпендикулярна на MC (α е симетралната равнина на MC). Тогава α съдържа всички точки P в пространството, изпълняващи равенството

$$PM = PC \tag{4}$$

Разглеждаме т.$O = MO_1 \cap \alpha$. От (3) и (4) следва, че $OM = OA = OB = OC = OD$. Върховете на пирамидата $ABCDM$ лежат върху сфера с център т.O и радиус $R = OM$.

2) Разглеждаме $ABCD$ и окръжността $k_1(O_1; R_1)$, описана около него. ΔABD със страна $BD = 12$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ е вписан в k_1. По синусова теорема следва, че $2R_1 = \dfrac{BD}{\sin 30^\circ} = \dfrac{12}{\frac{1}{2}}$, откъдето $R_1 = 12$.



3) Нека $S(O; R)$ е сферата, описана около $ABCDM$. Разглеждаме сечение на сферата с равнина, определена от точките A, M и O. MN-диаметър на сечението. $MA = 15$-околен ръб.
$AO_1 = R_1 = 12$
$\sphericalangle MAN = 90^\circ$.
От $\Delta MAO_1 \Rightarrow MO_1 = 9$.
Тогава $O_1N = 2R - 9$.
AO_1-височина в $\Delta MAN \Rightarrow$

$$\begin{aligned} AO_1^2 &= MO_1.O_1N \\ 12^2 &= 9(2R - 9) \\ 2R &= 25 \\ R &= 12,5 \end{aligned}$$

