Примерни задачи по теория на числата

Задача 1. Нека $d = (1887, 1295)$.
а) Намерете d.
б) Представете d като линейна комбинация на числата 1887 и 1295

Задача 2. За кои цели числа n числото $\frac{n^3+n^2+2n}{4}$ не е цяло?

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n $43|6^{n+2}+7^{2n+1}$.

Задача 4. В числото $n = 13645x04142250$ има неизвестна цифра x.
а) Намерете най-високата степен на 5, която дели n.
б) За кое x числото n се дели на 9?
в) Ако n дава остатък 5 при деление на 11, то колко е x?

Задача 5. Нека $n = 145626x0725725$. Да се определи x, ако
а) n се дели на 9;
б) n дава остатък 2 при деление на 11.

Задача 6. Нека $n = 183416x0725445$. Да се определи x, ако
а) n се дели на 9;
б) n дава остатък 2 при деление на 11.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 7. Да се докаже, че числото $2^{48}-1$ се дели на 97.

Задача 8. Да се докаже, че $13|3^{n+2}+4^{2n+1}$ за всяко $n \geqq 0$.

Задача 9. Да се докаже, че числото $111^{333}+333^{111}$ се дели на 7.

Задача 10. Да се докаже, че числото $314^{159}+265^{358}+10$ се дели на 19.

Задача 11. Пресметнете остатъкът на числото 2^{2018} по модул 77.

Задача 12. Намерете последните две цифри от десетичния запис на числото
а) $99^{99}-51^{51}$;
б) 3^{2009};
в) 557^{2018};

Задача 13. Намерете остатъкът от делението на числото $222^{333}-333^{222}$ с 7.

Задача 14. Да се докаже, че за всяко естествено число n са в сила сравненията $99^{2n+1} \equiv 99(\mod 100)$ и $99^{2n} \equiv 1(\mod 100)$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 15. Нека $n \in \mathbb{N}$. Покажете, че

$$\sum_{d|n} \mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = 1\,.$$

Задача 16. Нека $n \in \mathbb{N}$. Покажете, че

$$\sum_{d|n} \mu(d)\sigma\left(\frac{n}{d}\right) = n\,.$$

Задача 17. Да се намерят всички цели числа n, за които $\tau(3n) = \tau(13n)$.

Задача 18. Да се намери броят на естествените числа по-малки от 1000, които са взаимно прости с 5 и 7.

Задача 19. Да се намери броят на естествените числа по-малки от 1000, които са взаимно прости с 9 и 5.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 20. Като използвате теоремата на Ойлер, докажете че $51|10^{32n+9}-7$ за всяко естествено число n.

Задача 21. При $p \geqq 3$, да се докаже че $6p|7^5-5^p-2$.

Задача 22. Да се докаже, че за всяко естествено число n, е в сила сравнението $a^{4n+1} \equiv a(\mod 10)$.

Задача 23. Докажете, че $8^n|(4n)!$ за всяко естетсвено число n.

Задача 24. Да се докаже, че ако $(n, 3) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, то $n^7 \equiv n(\mod 63)$.

Задача 25. Да се докаже, че ако $(n, 72) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, то $n^{12} \equiv n(\mod 72)$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 26. Да се намерят всички естествени числа n, за които $n + \tau(n) = \tau^2(n)$.

Задача 27. Да се намерят всички естествени числа n, за които $\frac{n\varphi(n)}{2} = 4n + 2$.

Задача 28. Да се намерят всички естествени числа n, за които $\tau(n) = 9$.

Задача 29. Пресметнете $\varphi(2016)$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 30. Да се намерят всички прости числа p и q, за които $p^2 = 2q^2 + 1$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 31. Да се намерят всички естествени числа n, за които $\sigma(n) = 91$.

Задача 32. Намерете най-големият общ делител на числата $9n + 17$ и $7n + 11$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 33. Да се докаже, че ако p е нечетно просто число, то $(p-2)! \equiv 1(\mod p)$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 34. Нека $a, b \in \mathbb{Z}$, p е просто, $(a, p^2) = p$ и $(b, p^3) = p^2$. Пресметнете (ab, p^4) и $(a + b, p^4)$.

Задача 35. Да се намерят всички $a, b \in \mathbb{Z}$, за които

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{3}{13}$$

Задача 36. Кои са последните три цифри на числото 35^{652}.

Задача 37. Известна теорема на Дирихле гласи, че ако числата k, l, $k \geqq 1$ са взаимно прости, то аритметичната прогресия $\{ka+l\}_{a=1}^{\infty}$ съдържа безброй много прости числа. Докажете по-слабото твърдение, че ако $(l, k) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, то съществуват безброй много естествени числа a, такива че $(ka + l, n) = 1$.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 38. В числото $n = 78445x043592262$ има неизвестна цифра x.
а) Намерете най-високата степен на 7, която дели n.
б) За кое x числото n се дели на 9?
в) Ако n дава остатък 5 при деление на 11, то колко е x?

Задача 39. Докажете, че $8^n | (4n)!$ за всяко естетсвено число n.

Задача 40. Пресметнете остатъкът на числото 554^{455} по модул 5.

Задача 41. Ако n е цяло, то какъв може да е най-големият общ делител $(2n + 3, 3n - 2)$?

Примерни задачи по теория на числата

Задача 42. Нека $n = 183416x0721768935$. Да се определи x, ако
а) n се дели на 9;
б) n дава остатък 2 при деление на 11.

Задача 43. Да се намери броят на естествените числа по-малки от 1000, които са взаимно прости с 9 и 5.

Задача 44. Да се докаже, че не съществуват естествени числа a и b, такива че числата $a^2 + b^2$ и $a^2 - b^2$ да са едновременно точни квадрати.

Задача 45. Пресметнете остатъка на числото 2^{1000} по модул 997.

Задача 46. Проверете, че числото

$$2011^{1001} + 2012^{1001} + 2013^{1001} + 2014^{1001} + \\ + 2015^{1001} + 2016^{1001} + 2017^{1001}$$

се дели на 7.

Примерни задачи по теория на числата

Задача 47. Пресметнете последните три цифри на числото 57^{403}.

Задача 48. Пресметнете остатъка на числото 3^{300} по модул 343.

Задача 49. Докажете, че

$$\sum_{\substack{k \leq n \\ (k,\, n) = 1}} k = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

Задача 50. Нека $n \in \mathbb{N}$.
а) Покажете, че ако $\varphi(a) = 4n + 2$, то $a = p^\alpha$ или $a = 2p^\alpha$.
б) Покажете, че уравнението $\varphi(a) = 14$ няма решение.

Задача 51. Намерете всички прости числа p, за които $p | 13^{2p-1} + 17$.

Задача 52. Докажете, че за всяко естествено число n, числата

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

не са прости.

Задача 53. Докажете, че ако $p \equiv 3(\mod 4)$, то $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1(\mod p)$.